

캡스톤디자인2

Research Project

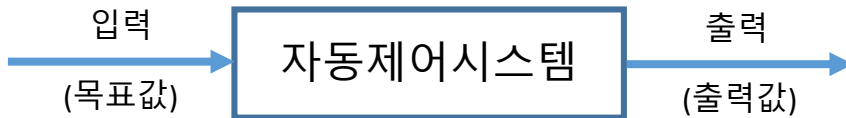
int**Ro**-Lab.

청주대학교 무인항공기학과
김상현 교수 (www.intro-lab.com)

자동제어 시스템의 구성

◆ 자동제어 시스템의 기본 구성

- 목표값을 입력하면 출력값이 목표값과 같이 지도록 조절



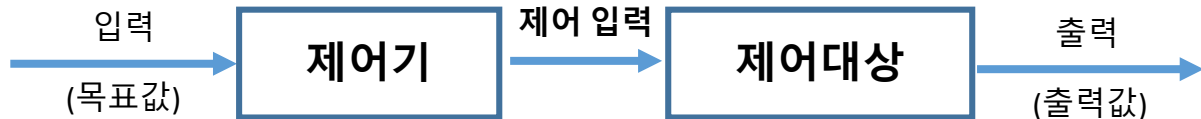
● 예시

- 방안 온도를 26도로 설정하면 에어컨 혹은 히터가 동작하여 방안 온도를 26도로 맞춤.
- 입력: 사용자가 입력한 온도값, 출력: 현재 방안 온도

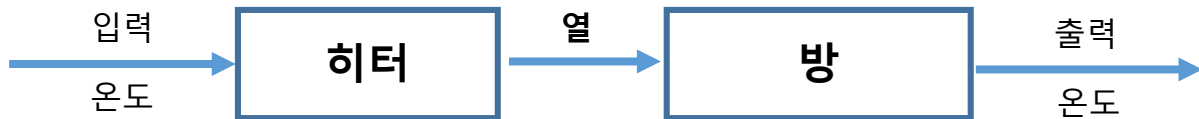
자동제어 시스템의 구성

◆ 개루프 제어시스템과 폐루프 제어시스템

- 개루프 제어시스템(Open-Loop Control System)



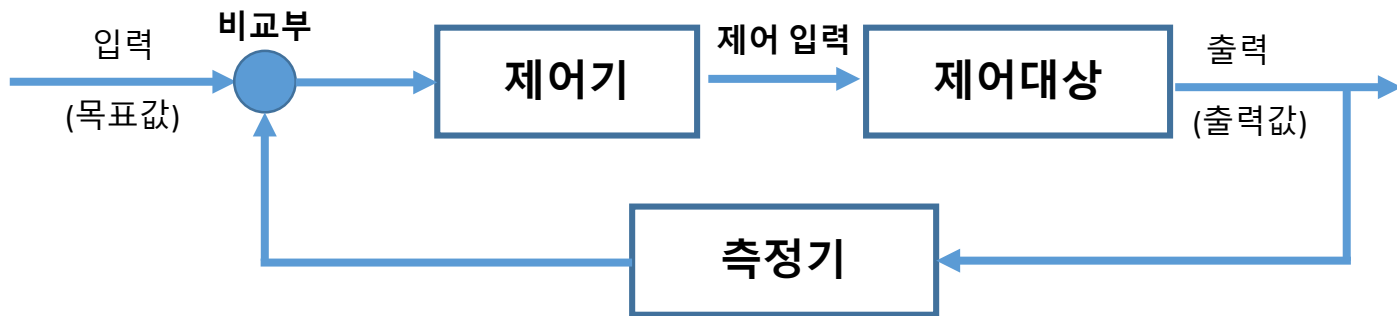
- 예시



자동제어 시스템의 구성

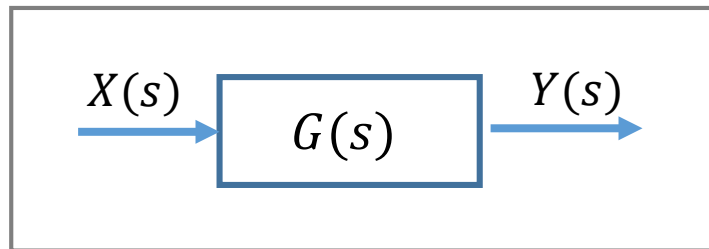
◆ 개루프 제어시스템과 폐루프 제어시스템

- 폐루프 제어시스템(Closed-Loop Control System)



◆ 전달함수(Transfer Function)

- 시스템의 입력과 출력 사이의 관계를 수학적으로 나타낸 식.
- 시간에 따라 변하는 복잡한 미분방정식을 계산이 편리한 대수방정식으로 바꿈.
 - 대수방정식(Algebraic Equation): 기본 사칙연산과 제곱, 제곱근 같은 기본 연산으로 구성 가능.
- 이를 위해, 모든 초기 조건을 0으로 하고 출력 라플라스 변환을 입력 라플라스 변환으로 나눈 값으로 정의.
 - 라플라스 변환(Laplace Transform): 시간에 대한 함수를 복소수(주파수 영역) 함수로 바꾸어주는 이론.
 - 사용 이유: 시간에 대한 함수는 복잡한 미분방정식이 사용됨. → 복소수 함수를 사용하면 대수방정식 사용.
 - 즉, 인간이 손으로 계산하기 편하기 때문에 사용 → 고전적인 방식



전달함수로 표현한 자동제어 시스템

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

전달함수 정의

◆ 전달함수(Transfer Function)

- 전달함수의 대수방정식 예시

- 미분: s 를 곱한다

- 1계 미분: $\mathcal{L}\left\{ \frac{df(t)}{dt} \right\} = sF(s) - f(0)$

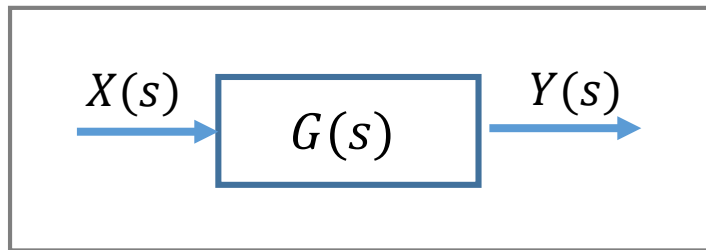
- 2계 미분: $\mathcal{L}\left\{ \frac{d^2f(t)}{dt^2} \right\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$

- 적분: s 를 나눈다

- 적분 공식: $\mathcal{L}\left\{ \int_0^t f(\tau)d\tau \right\} = \frac{1}{s} F(s)$

◆ 라플라스 변환(Laplace Transform)

- 시간 (t)에 대한 함수를 복소수 (s)에 대한 함수로 변환



전달함수로 표현한 자동제어 시스템

$f(t) \rightarrow F(s)$	$x(t) \rightarrow X(s)$
	$y(t) \rightarrow Y(s)$
	$g(t) \rightarrow G(s)$

복소함수

◆ 복소수

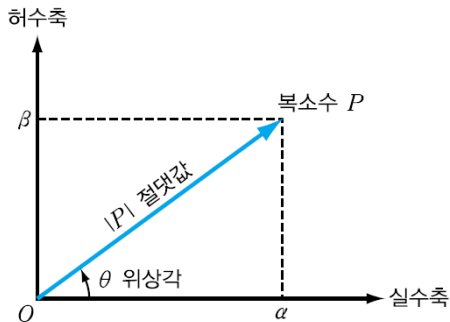
$$P = \alpha + j\beta \quad \leftarrow \text{직교좌표식}$$

$$= |P| \angle \theta \quad \leftarrow \text{극좌표식}$$

$$= |P| e^{j\theta} \quad \leftarrow \text{지수식}$$

* 오일러 공식

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$$



[그림 2-1] 복소수의 벡터 표기

$$|P| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)$$

$$\alpha = |P| \cos \theta$$

$$\beta = |P| \sin \theta$$

◆ 복소수: 오일러 공식 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$

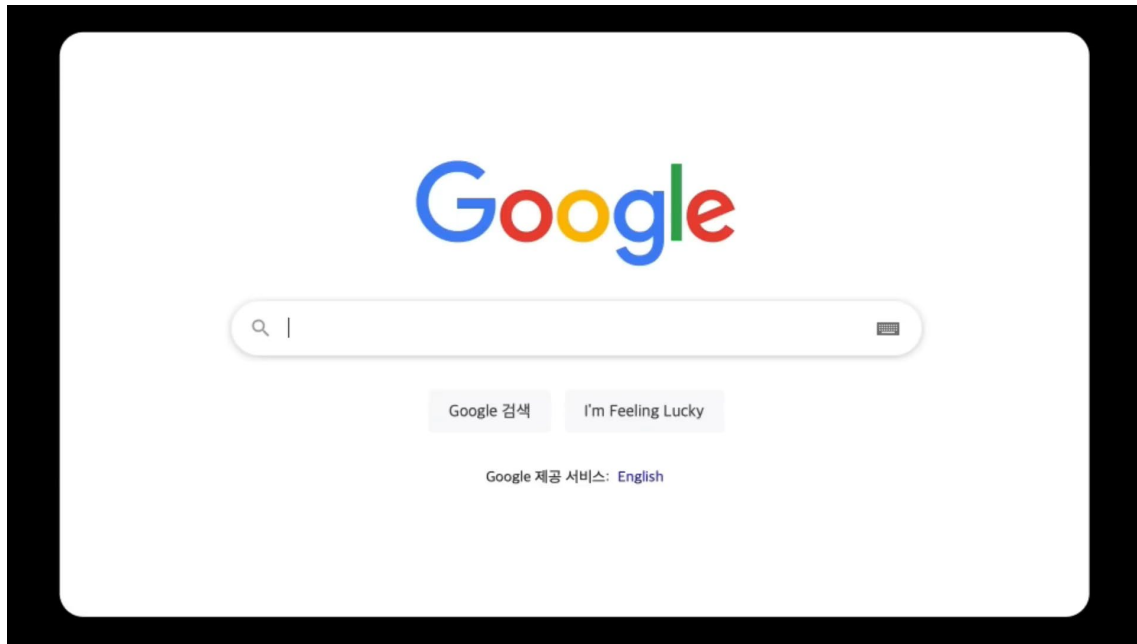


복소함수

◆ 복소수: 오일러 공식 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$

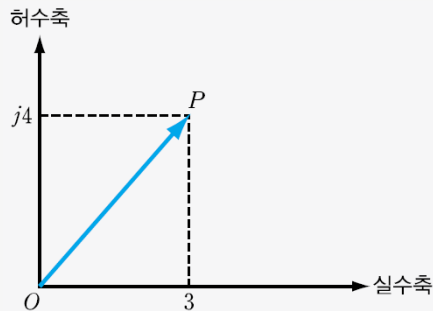


◆ 복소수: 오일러 공식 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$



예제 2-1

[그림 2-2]와 같은 복소수 P 를 직교좌표식, 극좌표식, 지수식으로 표현하라.

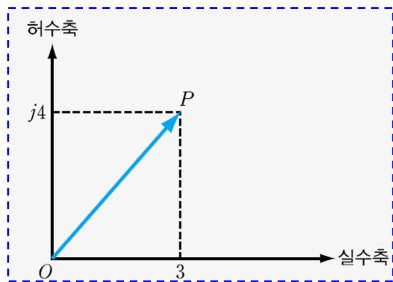


[그림 2-2] [예제 2-1]의 복소수 P

복소함수

◆ 복소수

● 풀이



$$P = 3 + j4$$

$$= 5 \angle 53.13^\circ$$

$$= 5 e^{j53.13^\circ}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) = 53.13^\circ$$

◆ 복소수의 사칙연산

● 예제

복소수 $P = 2 - j3$, $Q = 5 + j2$ 에 대해 다음을 구하라.

(a) $P + Q$

(b) $P - Q$

(c) $P \times Q$

(d) $P \div Q$

$$j^2 = -1$$

풀이

$$(a) P + Q = (2 - j3) + (5 + j2) = (2 + 5) + j(-3 + 2) = 7 - j$$

$$(b) P - Q = (2 - j3) - (5 + j2) = (2 - 5) + j(-3 - 2) = -3 - j5$$

$$(c) P \times Q = (2 - j3) \times (5 + j2) = 2 \times 5 + 2 \times j2 - j3 \times 5 - j3 \times j2 \\ = 10 + j4 - j15 + 6 = 16 - j11$$

$$(d) P \div Q = (2 - j3) \div (5 + j2) = \frac{2 - j3}{5 + j2} = \frac{(2 - j3)(5 - j2)}{(5 + j2)(5 - j2)} \\ = \frac{4 - j19}{5^2 + 2^2} = \frac{4}{29} - j\frac{19}{29} \approx 0.138 - j0.655$$

복소함수

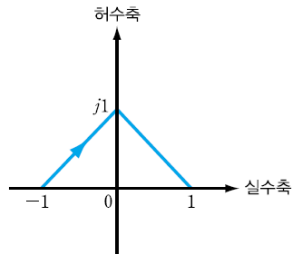
◆ 복소함수

- 복소수 s 의 함수 $G(s)$

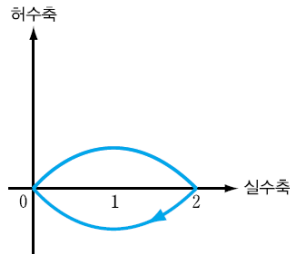
$$G(s) = \text{실수부} + j\text{허수부}$$

$$G(s) = \text{Re } G + j\text{Im } G$$

(예) $G(s) = s^2 + 1$



(a) s 평면



(b) $G(s)$ 평면

[그림 2-4] s 평면의 궤적에 대한 $G(s)$ 평면의 사상

[표 2-1] s 값에 대한 $G(s) = s^2 + 1$ 의 값

s	$G(s)$
$-1.0 + j0.0$	$2.0 + j0.0$
$-0.75 + j0.25$	$1.5 - j0.375$
$-0.5 + j0.5$	$1.0 - j0.5$
$-0.25 + j0.75$	$0.5 - j0.375$
$0.0 + j1.0$	$0.0 + j0.0$
$0.25 + j0.75$	$0.5 + j0.375$
$0.5 + j0.5$	$1.0 + j0.5$
$0.75 + j0.25$	$1.5 + j0.375$
$1.0 + j0.0$	$2.0 + j0.0$

◆ 복소함수

- 극점: 어떤 복소함수가 s 평면의 어떤 특정한 점에서 무한대의 값을 가질 때, 그 점을 극점(pole)이라 함

$$\lim_{s \rightarrow s_1} G(s) = \infty$$

(예)

$$G_1(s) = \frac{10}{(s+3)(s+2)} + \frac{s+5}{s^2(s-2)^3}$$

$s = -3, -2$: 단순 극점

$s = 0$: 2차 극점

$s = 2$: 3차 극점

$$G_2(s) = \frac{4s^2 - 2s + 3}{(s-5)(s+4)}$$

극점: $s = 5, -4$

◆ 복소함수

- 영점: 어떤 복소함수가 s 평면의 어떤 특정한 점에서 값이 0이 될 때, 그 점을 영점(zero)이라고 함

$$\lim_{s \rightarrow s_1} G(s) = 0$$

(예)
$$G(s) = \frac{10(s-2)^3(s+5)}{s^2(s+5)(s-3)^2}$$

$$G(s) = s^2 + 1$$

영점은?

$s = -5$: 단순 영점

$s = 2$: 3차 영점

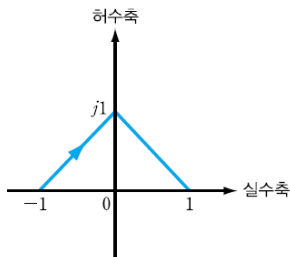
$s = \infty$: 단순 영점

◆ 복소함수

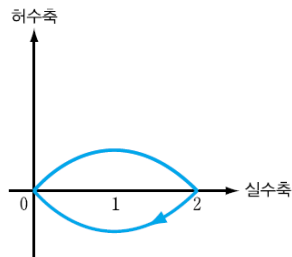
$$G(s) = s^2 + 1$$

영점은?

제시된 전달함수 $G(s) = s^2 + 1$ 의 영점은 $s = \pm i$ (또는 공학 표기법으로 $\pm j$)입니다.



(a) s 평면



(b) $G(s)$ 평면

◆ 복소함수

다음 복소함수의 극점과 영점을 구하라.

$$(a) F_1(s) = \frac{s^2 + 4s + 13}{s^3 + 5s^2 + s + 5}$$

$$(b) F_2(s) = \frac{5}{s+5} + \frac{3}{s+3}$$

◆ 복소함수

풀이

$$F_1(s) = \frac{s^2 + 4s + 13}{s^3 + 5s^2 + s + 5} = \frac{(s + 2 - j3)(s + 2 + j3)}{(s + 5)(s - j)(s + j)}$$

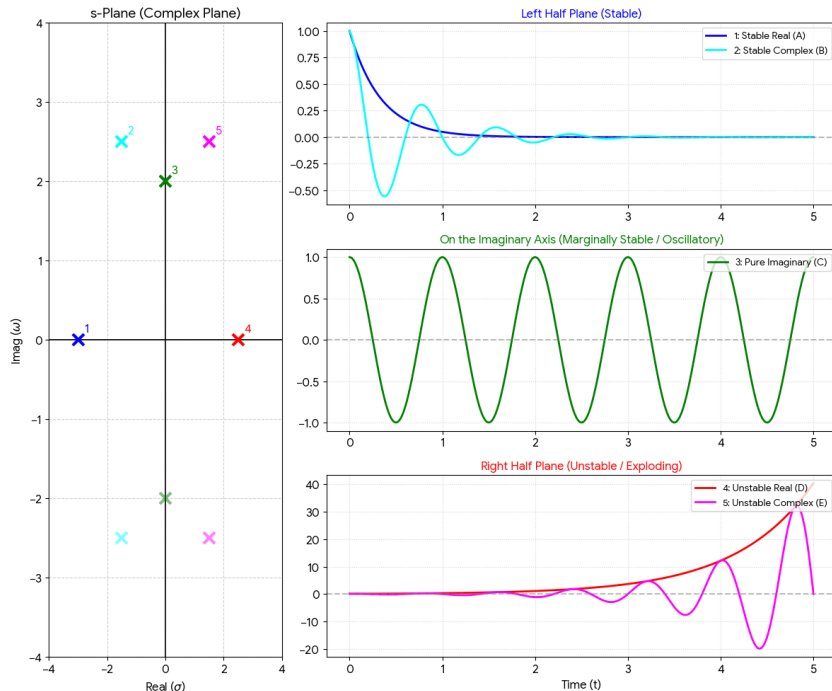
영점은 $s = -2 + j3, -2 - j3$ 이고, 극점은 $s = -5, j, -j$ 이다.

$$F_2(s) = \frac{5}{s + 5} + \frac{3}{s + 3} = \frac{8s + 30}{(s + 5)(s + 3)} = \frac{8(s + 3.75)}{(s + 5)(s + 3)}$$

영점은 $s = -3.75$ 이고, 극점은 $s = -3, -5$ 이다.

◆ 복소함수

- 극점을 계산하는 이유
 - 시스템 안정성 분석 가능
 - 무한 진동, 감쇄, 증폭 등



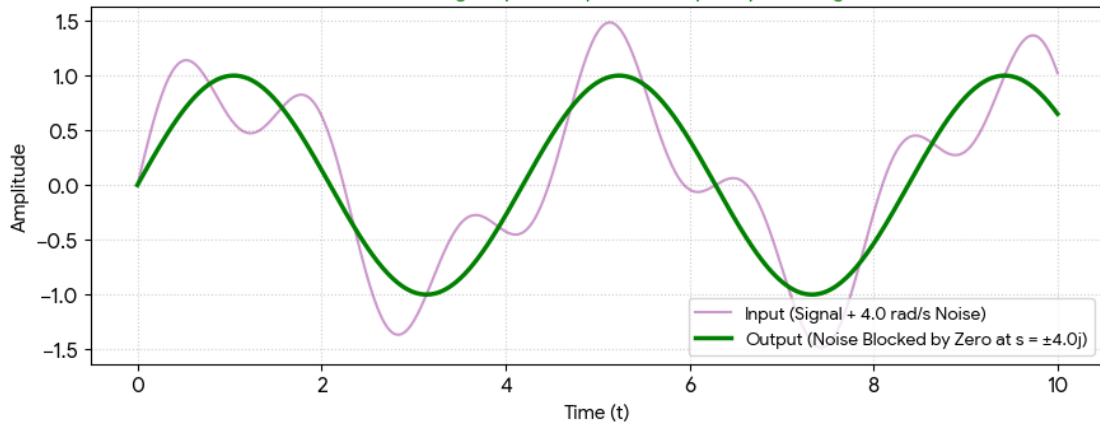
◆ 복소함수

- 영점을 계산하는 이유
 - 영점은 특정 주파수를 제거하는 필터가 됨

$$s^2 + 4^2 = 0$$

$$s = \pm 4.0j \rightarrow 4 \text{ rad/s 주파수 성분 제거}$$

3. Pure Imaginary Zero: Specific Frequency Blocking



라플라스 변환

◆ 라플라스 변환

● 변환식

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

● 변환 조건

➤ 적분 기호 안의 값이 0에 수렴해야 특정식이 계산됨.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) e^{-st} = 0$$

$$s = \sigma + j\omega$$

$$f(t) = 1 \rightarrow \operatorname{Re}(s) = \sigma > 0$$

$$f(t) = e^{3t} \rightarrow \operatorname{Re}(s) = \sigma > 3$$

라플라스 변환

◆ 라플라스 변환

● 예제

$f(t) = 10$ 의 라플라스 변환을 구하라.

풀이

식 (2.17)을 이용해 다음과 같이 구한다.

$$F(s) = \int_0^{\infty} 10 e^{-st} dt = \left[\frac{10}{-s} e^{-st} \right]_0^{\infty} = \frac{10}{s}$$

라플라스 변환

◆ 라플라스 변환

● 예제

$f(t) = e^{-5t}$ 의 라플라스 변환을 구하라.

라플라스 변환

◆ 라플라스 변환

● 예제

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-5t} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s+5)t} dt = \left[\frac{1}{-(s+5)} e^{-(s+5)t} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{s+5}$$

◆ 라플라스 변환은 과거에만 머물러 있을까?

- **아니다.** 최신 인공지능 기술에도 적용하는 사례가 있다.
- 왜? Physical AI 구현자. → 고전 기술을 알아야 하는 이유 → 수단과 방법을 가리지 않고 총동원!!

1. 라플라스 뉴럴 오퍼레이터 (LNO, Laplace Neural Operator)

최근 AI 학계의 가장 뜨거운 화두 중 하나는 기상 예측, 항공기 설계, 분자 역학 등에 쓰이는 물리 법칙(미분방정식)을 인공지능으로 초고속 시뮬레이션하는 ‘AI 기반 물리 모델링’입니다.  arXiv.org +1

기존에는 푸리에 변환을 딥러닝에 접목한 푸리에 뉴럴 오퍼레이터(FNO)가 주로 쓰였으나, **주기성이 없는 신호나 시간에 따라 감쇠하는 신호(진동이 점점 줄어드는 현상 등)를 학습하는 데 한계가** 있었습니다.  alphaXiv +1

- **라플라스의 구현:** 2024년 과학계 최고 권위지인 *Nature Machine Intelligence* 등에 발표된 [LNO\(라플라스 뉴럴 오퍼레이터\)](#)는 딥러닝 레이어 내부에 라플라스 변환을 내장했습니다.  Nature +1
- **효과:** 비주기성 신호, 갑자기 변하는 과도 응답(Transient Response), 에너지 붕괴 현상 등을 완벽하게 학습해 내며 기상 이변이나 복잡한 물리 시스템을 실시간에 가깝게 예측하는 데 성공했습니다.  arXiv.org +2

◆ 자연상수, e

- 오일러 수라고 하며 수학에서 가장 중요하게 사용되는 무리수이자 초월수.
- $e = 2.7182818284...$
- 영어식 읽기: e, Euler's Number, (함수) Exponential x

◆ 자연상수 정의(1)

- 무한급수

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots = 2.71828 \dots$$

참고로, $0! = 1$

◆ 자연상수 정의(2)

- 극한값

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = 2.71828 \dots$$

◆ 기본 성질(Exponential Function)

- 자연상수의 지수함수 $f(x) = e^x$ 는 미분해도 자기 자신

$$f(x) = e^x \qquad \frac{df(x)}{dx} = e^x$$

$$f(x) = e^{ax} \qquad \frac{df(x)}{dx} = ae^{ax}$$

라플라스 변환

◆ 유리수

- 두 정수의 비(분수)로 나타낼 수 있는 수, 유한소수 혹은 순환소수
- 예시

$$\frac{1}{2} = 0.5$$

$$\frac{1}{3} = 0.3333 \dots$$

◆ 무리수

- 실수 중 유리수가 아닌 수
- 실수는 유리수 혹은 무리수임. 즉, 유리수도 아니고 무리수도 아닌 실수는 존재하지 않음.
- 예시:

$$e = 2.7182 \dots$$

초월수

$$\pi = 3.1415 \dots$$

초월수

$$\sqrt{2} = 1.4142 \dots$$

초월수 아님

$$x^2 - 2 = 0 \text{의 근}$$

◆ 초월수

- 유리수 계수를 가진 다항 방정식의 근이 될 수 없는 실수나 복소수
- 예: 자연상수, 원주율 등

$$0! = ?$$

◆ 0!은 왜 1일까?

●팩토리얼(Factorial) 하향 규칙

$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

$$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6 \quad \longrightarrow \quad 4! \text{을 } 4 \text{로 나눈 값}$$

$$2! = 2 \times 1 = 2 \quad \longrightarrow \quad 3! \text{을 } 3 \text{으로 나눈 값}$$

$$1! = 1 \quad \longrightarrow \quad 2! \text{을 } 2 \text{로 나눈 값}$$

$$0! = ? \quad \longrightarrow \quad 1! \text{을 } 1 \text{로 나눈 값}$$

$$0! = \frac{1!}{1} = \frac{1}{1} = 1$$

라플라스 변환

◆ 라플라스 변환

● 예제

$f(t) = e^{-5t}$ 의 라플라스 변환을 구하라.

라플라스 변환

◆ 라플라스 변환

● 예제

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-5t} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s+5)t} dt = \left[\frac{1}{-(s+5)} e^{-(s+5)t} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{s+5}$$

라플라스 변환

◆ 라플라스 변환

● 예제: 기본 함수

$f(t)$	$F(s)$
c	$\frac{c}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
t^2	$\frac{2}{s^3}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$

라플라스 변환

◆ 라플라스 변환

● 예제

[표 2-2]를 이용하여 다음 함수의 라플라스 변환을 구하라.

(a) $f(t) = 1$

(b) $f(t) = 10e^{-3t}$

(c) $f(t) = 5t^4$

(d) $f(t) = 100 \cos 5t$

풀이

(a) $F(s) = \frac{1}{s}$

(b) $F(s) = \frac{10}{s+3}$

(c) $F(s) = 5 \times \frac{4!}{s^5} = \frac{120}{s^5}$

(d) $F(s) = 100 \times \frac{s}{s^2+5^2} = \frac{100s}{s^2+25}$

◆ 라플라스 변환

● 예제

$f(t) = \sin(\omega t + \theta)$ 의 라플라스 변환을 구하라.

풀이

$$f(t) = \sin(\omega t + \theta) = \sin \omega t \cdot \cos \theta + \cos \omega t \cdot \sin \theta$$

$$\mathcal{L} [\sin(\omega t + \theta)] = \cos \theta \mathcal{L} [\sin \omega t] + \sin \theta \mathcal{L} [\cos \omega t]$$

$$= \cos \theta \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} + \sin \theta \frac{s}{s^2 + \omega^2} = \frac{(\sin \theta) s + \omega \cos \theta}{s^2 + \omega^2}$$