

캡스톤디자인2

Research Project

int**Ro**-Lab.

청주대학교 무인항공기학과
김상현 교수 (www.intro-lab.com)

◆ 과제 주제: 졸업 논문 발표

◆ 발표 형식: 포스터 발표

◆ 논문 최종본 제출 마감: 11월 19일(목) 23:00

◆ 논문 최종본 제출 방법: 에델바이스에 HWP와 PDF 모두 제출

◆ 논문 최종본 포스터 발표 일정: 11월 26일(목) 오후 4시

◆ 발표 방법: 포스터 출력 및 거치 후, 포스터 앞에서 설명

◆ 캡스톤디자인2 → 1분반, 2분반 모두 발표 진행 예정

공지: 기말평가(그 외 군사학과, 졸업논문 대체 학생)

- ◆ 과제 주제: 졸업 논문 혹은 관심 주제 발표
- ◆ 발표 형식: 자유 양식 발표

- ◆ 최종본 제출 마감: 11월 19일(목) 23:00
- ◆ 최종본 제출 방법: 에델바이스에 자유 양식 발표 자료 제출

- ◆ 발표 일정: 11월 27일(금) 수업 시간
- ◆ 발표 방법: 강의실 컴퓨터로 발표

라플라스 변환

◆ 라플라스 변환

● 예제

[표 2-2]를 이용하여 다음 함수의 라플라스 변환을 구하라.

(a) $f(t) = 1$

(b) $f(t) = 10e^{-3t}$

(c) $f(t) = 5t^4$

(d) $f(t) = 100 \cos 5t$

풀이

(a) $F(s) = \frac{1}{s}$

(b) $F(s) = \frac{10}{s+3}$

(c) $F(s) = 5 \times \frac{4!}{s^5} = \frac{120}{s^5}$

(d) $F(s) = 100 \times \frac{s}{s^2+5^2} = \frac{100s}{s^2+25}$

라플라스 변환

◆ 라플라스 변환

● 예제

$f(t) = \sin(\omega t + \theta)$ 의 라플라스 변환을 구하라.

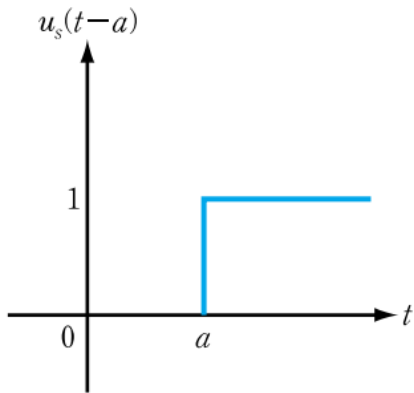
풀이

$$f(t) = \sin(\omega t + \theta) = \sin \omega t \cdot \cos \theta + \cos \omega t \cdot \sin \theta$$

$$\mathcal{L} [\sin(\omega t + \theta)] = \cos \theta \mathcal{L} [\sin \omega t] + \sin \theta \mathcal{L} [\cos \omega t]$$

$$= \cos \theta \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} + \sin \theta \frac{s}{s^2 + \omega^2} = \frac{(\sin \theta) s + \omega \cos \theta}{s^2 + \omega^2}$$

◆ 단위 계단 함수



$$u_s(t-a) = \begin{cases} 0, & t < a \\ 1, & t > a \end{cases}$$

◆ 단위 계단 함수

★ 단위계단함수의 라플라스 변환 ★

$$\mathcal{L} [u_s(t-a)] = \frac{e^{-as}}{s} \quad (2.26)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L} [u_s(t-a)] &= \int_0^{\infty} u_s(t-a) e^{-st} dt \\&= \int_0^a u_s(t-a) e^{-st} dt + \int_a^{\infty} u_s(t-a) e^{-st} dt \\&= 0 + \int_a^{\infty} e^{-st} dt \\&= \left[\frac{1}{-s} e^{-st} \right]_a^{\infty} \\&= \frac{e^{-as}}{s}\end{aligned}$$

$$\mathcal{L} [u_s(t)] = \frac{1}{s}$$

◆ 행렬의 정의

● m행 n열 행렬

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

● 행 벡터 예시

$$A = [2 \quad 5] \quad B = [3 \quad 0 \quad -8]$$

● 열 벡터 예시

$$C = \begin{bmatrix} -4 \\ 6 \\ 15 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \end{bmatrix}$$

◆ 행렬의 종류

종류	설명	예시
정방행렬 (square matrix)	행의 수와 열의 수가 같은, 즉 $m = n$ 인 행렬이다.	$\begin{bmatrix} 1 & 5 & -4 \\ 7 & -2 & 3 \\ 6 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$
대각행렬 (diagonal matrix)	정방행렬 중에서 대각요소 이외의 모든 요소가 0인 행렬이다.	$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -7 \end{bmatrix}$
단위행렬 (unit matrix)	대각행렬 중에서 대각요소가 모두 1인 행렬로 I 로 표기한다.	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
전치행렬 (transposed matrix)	어떤 행렬 A 에서 행과 열을 교환하여 만든 행렬로 A^T 또는 A' 으로 표기한다.	$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -4 \\ 7 & -2 & 3 \\ 6 & 1 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 6 \\ 5 & -2 & 3 \\ -4 & 3 & 4 \end{bmatrix}$
대칭행렬 (symmetric matrix)	어떤 행렬과 그 행렬의 전치행렬이 같은 행렬이다.	$A = A^T$

◆ 행렬의 연산

● 등식관계

$A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ 에서 모든 i, j 에 대해 다음을 만족하면 $A = B$ 이다.

$$a_{ij} = b_{ij}$$

● 덧셈과 뺄셈

행렬 A , B , C 에 대해 $A \pm B = C$ 이면 모든 원소에 대해 다음을 만족한다.

$$c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$$

◆ 행렬의 연산

● 곱셈

$$A B = C$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times 2 + 3 \times 1 & 2 \times 5 + 3 \times 2 & 2 \times 4 + 3 \times 3 \\ 4 \times 2 + 5 \times 1 & 4 \times 5 + 5 \times 2 & 4 \times 4 + 5 \times 3 \\ 1 \times 2 + 2 \times 1 & 1 \times 5 + 2 \times 2 & 1 \times 4 + 2 \times 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 16 & 17 \\ 13 & 30 & 31 \\ 4 & 9 & 10 \end{bmatrix}$$

(3×2) 행렬과 (2×3) 행렬을 곱하면 다음과 같이 (3×3) 행렬이 된다.

$$(3 \times 2) \times (2 \times 3) = (3 \times 3)$$

◆ 행렬의 연산

● 결합법칙과 교환법칙

- 결합법칙 $(A + B) + C = A + (B + C)$

$$(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$$

- 교환법칙 $A + B = B + A$

$$A \times B \neq B \times A$$

◆ 행렬의 연산

● 스칼라값의 곱셈

$$3 \times \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times 3 & 2 \times 3 \\ 4 \times 3 & 10 \times 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 12 & 30 \end{bmatrix}$$

$$3 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \times 3 & 2 \times 3 \\ 4 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \times 3 & 2 \\ 4 \times 3 & 10 \end{vmatrix} = 6$$

◆ 행렬의 연산

● 기타 행렬의 법칙

$$AI = IA = A$$

$$(A^T)^T = A$$

$$(A + B)^T = A^T + B^T$$

$$(AB)^T = B^T A^T$$

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$$

◆ 행렬의 연산의 예

행렬 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ 와 $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$ 에 대해 다음을 구하라.

(a) $\mathbf{AB}$

(b) $\mathbf{BA}$

(c) $(\mathbf{AB})^T$

(d) $(\mathbf{AB})^{-1}$

(e) $\mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$

(f) $\mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^{-1}$

◆ 행렬의 연산의 예

풀이

$$(a) \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix}$$

$$(b) \mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{bmatrix}$$

$$(c) (\mathbf{AB})^T = \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \right)^T = \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 19 & 43 \\ 22 & 50 \end{bmatrix}$$

◆ 행렬의 연산의 예

$$\begin{aligned}
 \text{(d) } (\mathbf{AB})^{-1} &= \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix}^{-1} \\
 &= \frac{\text{adj} \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix}}{\begin{vmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{bmatrix} 50 & -43 \\ -22 & 19 \end{bmatrix}^T}{950 - 946} \\
 &= \frac{\begin{bmatrix} 50 & -22 \\ -43 & 19 \end{bmatrix}}{4} = \begin{bmatrix} 12.5 & -5.5 \\ -10.75 & 4.75 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\text{(e) } \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 43 \\ 22 & 50 \end{bmatrix}$$

◆ 행렬의 연산의 예

$$\begin{aligned}
 \text{(f) } \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1} &= \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \\
 &= \frac{\text{adj} \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}} \times \frac{\text{adj} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}} \\
 &= \frac{\begin{bmatrix} 8 & -7 \\ -6 & 5 \end{bmatrix}^T}{5 \times 8 - 7 \times 6} \times \frac{\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}^T}{1 \times 4 - 3 \times 2} \\
 &= \frac{\begin{bmatrix} 8 & -6 \\ -7 & 5 \end{bmatrix}}{-2} \times \frac{\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}}{-2} \\
 &= \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 3.5 & -2.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12.5 & -5.5 \\ -10.75 & 4.75 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 19 & 43 \\ 22 & 50 \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 12.5 & -5.5 \\ -10.75 & 4.75 \end{bmatrix}$$

◆ 행렬식

● 2 x 2 행렬식

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \times a_{22} - a_{12} \times a_{21}$$

● 예시

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 3 \times 5 - 4 \times 2 = 7$$

◆ 행렬식

● 3 x 3 행렬식

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

● 예시

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -5 & 4 \\ 6 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -5 & 4 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 6 & 0 \end{vmatrix}$$
$$= 2 \times 10 - 3 \times (-26) + 0 \times 30$$
$$= 98$$

◆ 소행렬식

● 예시

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & -2 \\ 0 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_{11} = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 32, \quad \Delta_{12} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4, \quad \Delta_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 6$$

$$\Delta_{21} = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = -2, \quad \Delta_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 8 \quad \bullet \bullet \bullet$$

◆ 여인수

● 예시

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & -2 \\ 0 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

$$C_{11} = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 32, \quad C_{12} = - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -4, \quad C_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 6$$

$$C_{21} = - \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 2, \quad C_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 8, \quad \bullet \bullet \bullet$$

◆ 행렬식

● 소행렬식 혹은 여인수 이용

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & -2 \\ 0 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_{11} = 32, \Delta_{12} = 4, \Delta_{13} = 6$$

$$C_{11} = 32, C_{12} = -4, C_{13} = 6$$

$$|A| = a_{11} \times \Delta_{11} - a_{12} \times \Delta_{12} + a_{13} \times \Delta_{13}$$

$$= a_{11} \times C_{11} + a_{12} \times C_{12} + a_{13} \times C_{13}$$

$$= 2 \times 32 - 4 \times 4 + 3 \times 6 = 66$$

◆ 역행렬

● 정의

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

◆ 수반행렬

★ 수반행렬 ★

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & C_{n3} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}^T$$

◆ 수반행렬의 예

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$C_{11} = \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -18$$

$$C_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 2$$

$$C_{13} = \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 4$$

$$C_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -11$$

$$C_{22} = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 14$$

$$C_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 5$$

$$C_{31} = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = -10$$

$$C_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4$$

$$C_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = -8$$

$$\text{adj } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -18 & 2 & 4 \\ -11 & 14 & 5 \\ -10 & -4 & -8 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -18 & -11 & -10 \\ 2 & 14 & -4 \\ 4 & 5 & -8 \end{bmatrix}$$

◆ 수반행렬을 이용한 역행렬 계산

★ 역행렬 ★

$$A^{-1} = \frac{adj A}{|A|}$$

$$|A| = 0$$

← 특이행렬

◆ 역행렬 계산 예시

행렬 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix}$ 의 역행렬을 구하라.

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\text{adj } \mathbf{A}}{|\mathbf{A}|}$$

풀이

$$C_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 5$$

$$C_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -10$$

$$C_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -8$$

$$C_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = -4$$

$$C_{22} = \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 7$$

$$C_{23} = -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 6$$

$$C_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3$$

$$C_{32} = -\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -6$$

$$C_{33} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5$$

$$\text{adj } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -10 & -8 \\ -4 & 7 & 6 \\ 3 & -6 & -5 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 3 \\ -10 & 7 & -6 \\ -8 & 6 & -5 \end{bmatrix}$$

◆ 역행렬 계산 예시

$$\text{adj } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 3 \\ -10 & 7 & -6 \\ -8 & 6 & -5 \end{bmatrix}$$

$$|\mathbf{A}| = a_{11} C_{11} + a_{12} C_{12} + a_{13} C_{13}$$

$$= (-1) \times 5 + 2 \times (-10) + (-3) \times (-8)$$

$$= -5 - 20 + 24 = -1$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\text{adj } \mathbf{A}}{|\mathbf{A}|} = \frac{\begin{bmatrix} 5 & -4 & 3 \\ -10 & 7 & -6 \\ -8 & 6 & -5 \end{bmatrix}}{-1} = \begin{bmatrix} -5 & 4 & -3 \\ 10 & -7 & 6 \\ 8 & -6 & 5 \end{bmatrix}$$